Лекция 6 Иерархический подход к построению моделей

Лишь в редких случаях бывает удобным и оправданным построение математических моделей даже относительно простых объектов сразу по всей полноте, с учетом всех факторов, существенных для его поведения. Поэтому естественен подход, реализуется «от простого к сложному». В этом случае следующий шаг делается после достаточно подробного изучения не очень сложной модели. При этом возникает цепочка все более полных моделей, каждая из которых отображает предыдущие, включая их в качестве частного случая.

Пример 1. Модель трехступенчатой ракеты

Построим иерархическую цепочку на примере модели многоступенчатой ракеты. Как было сказано на предыдущих лекциях, реальная одноступенчатая ракета неспособна развить первую космическую скорость. Причина этого – затраты горючего на разгон ненужной, отработавшей части структурной массы. Следовательно, при движении ракеты необходимо периодически избавляться от балласта. В проективной части это означает, что ракета должна состоять из нескольких ступеней, отбрасываемых по мере их использования.

Пусть m_0 – масса всей ракеты, m_p – масса полезной нагрузки, $m_0 = m_p + \sum_{i=1}^{n} m_i$, m_i – общая масса i -ой ступени, λm_i – соответствующая структурная масса равна, $m_i - \lambda m_i$ - масса топлива i -ой ступени. Величина λ и скорость истечения газов u для всех ступеней одинакова.

Возьмем для определенности число ступеней n = 3. Начальная масса такой ракеты равна $m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3$.

Рассмотрим момент, когда израсходовано всё топливо первой ступени и масса ракеты равна

$$m_0^1 = m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3. \qquad (6.1)$$

Тогда скорость ракеты первоначальной модели равна

$$v_1 = u \ln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right). \qquad (6.2)$$

После достижения скорости v_1 структурная масса λm_1 отбрасывается и включается вторая ступень. Масса ракеты в этот момент равна $m_p + m_2 + m_3$.

Начиная с этого момента и до полного выгорания топлива второй ступени, ничто не мешает пользоваться предыдущей моделью. Все рассуждения и сохранении суммарного импульса и соответствующие выкладки остаются в силе. При этом в формуле (6.2) следует учесть, что у ракеты уже есть начальная скорость v_1.

Тогда после полного выгорания топлива из второй ступени ракета достигает скорости

$$v_2 = v_1 + u\ln\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right). \tag{6.3}$$

Эти же рассуждения применимы и к третьей ступени ракеты. После отключения её двигателей, т.е. выгорания топлива третьей ступени. Скорость ракеты есть

$$v_3 = v_2 + u\ln\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right). \tag{6.3}$$

Эту цепочку нетрудно продолжить для любого числа ступеней и получить соответствующие формулы. В случае же $n = 3$ для окончательной скорости имеем

$$\begin{aligned} v_3 &= v_2 + u\ln\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right) = v_1 + u\ln\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right) + \\ &+ u\ln\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right) = u\ln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right) + \\ &+ u\ln\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right) + u\ln\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right) = \\ &= u\ln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\cdot\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\cdot\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right) \end{aligned} \tag{6.4}$$

Обозначая $\dfrac{m_p + m_1 + m_2 + m_3}{m_p + m_2 + m_3} = \dfrac{m_0}{m_p + m_2 + m_3} = \alpha_1$, $\dfrac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3} = \alpha_2$, $\dfrac{m_p + m_3}{m_p} = \alpha_3$, представим (6.4) в следующем виде:

$$\frac{v_3}{u} = \ln\left(\frac{\alpha_1}{1 + \lambda(\alpha_1 - 1)}\cdot\frac{\alpha_2}{1 + \lambda(\alpha_2 - 1)}\cdot\frac{\alpha_3}{1 + \lambda(\alpha_3 - 1)}\right) \tag{6.5}$$

Данное выражение симметрично по отношению к величинам α_1, α_2, α_3, и нетрудно показать, что его максимум достигается в симметричном случае, т.е. при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. При этом для $n = 3$

$$\alpha = \frac{1-\lambda}{P-\lambda}, \qquad P = e^{-\frac{v_3}{3u}}. \tag{6.6}$$

Также легко установить, что

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha^3 = \frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1-\lambda}{P-\lambda}\right)^3. \tag{6.7}$$

Для многоступенчатой ракеты, аналогично, имеем

$$\frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1-\lambda}{P-\lambda}\right)^n, \qquad P = e^{-\frac{v_n}{nu}}. \tag{6.8}$$

где n – число ступеней.

Проанализируем формулу (6.8). Примем $v_n = 10.5 km/\text{s}$, $\lambda = 0.1$. Известно $u = 3.5 km/\text{s}$. Тогда для $n = 2;3;4$ имеем: $m_{0_2} = 149 m_p$, $m_{0_3} = 77 m_p$, $m_{0_4} = 65 m_p$. Это значит, что двухступенчатая ракета пригодна для вывода на орбиту некоторой массы (массы спутника) m_p, однако для спутника весом 1 тонна общий вес ракеты должен равняться 149 тонн. Переход к трехступенчатому строению снизит вес ракеты почти в 2 раза (усложняя конечно ее конструкцию), а переход к четырехступенчатой ракете уже не даёт такого заметного выигрыша по сравнению трехступенчатой.

Построение иерархической цепочки позволило относительно просто прийти к этим важным выводам. Иерархическая модель часто строиться и по противоположному принципу от «сложного к простому». В этом случае реализуется путь «сверху-вниз» – из достаточно общей и сложной модели при соответствующих упрощенных предположениях получается последовательность все более простых (но имеющих уменьшенную область применимости) моделей.

Пример 2. Иерархия модели на примере механической системы «пружина – шарик»

Для движения шарика, соединенного с пружиной, построим иерархическую цепочку по принципу «снизу – вверх». Последовательно введем новые усложняющие факторы и дадим их математическое описание.

Ранее, пренебрегая силой трения шарика о поверхность, силой сопротивления воздуха движению шарика и использую второй закон

Ньютона, было получено уравнение колебаний системы «пружина – шарик» (2.1.16). Теперь усложним модель (2.1.16), учитывая еще действие внешней силы $F(r,t)$, зависящая от времени *t* и положения шарика *r*. Тогда из второго закона Ньютона сразу получаем, что в правой части уравнения появляется дополнительный член:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F(r,t) \tag{6.9}$$

Сначала рассмотрим простейший вариант уравнения (6.9), когда внешняя сила является постоянной, т.е. $F(r,t) = const = F_0$. Проведя замену $\bar{r} = r - \frac{F_0}{k}$, получаем для $\bar{r}$

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -k\bar{r}, \tag{6.10}$$

т.е. постоянная сила не вносит изменений в процесс колебаний за тем исключением, что координата нейтральной точки, в которой сила, действующая на шарик, равна нулю, сдвигается на величину $\frac{F_0}{k}$.

Гораздо более сложная картина движения может порождаться зависящей от времени силой $F(t)$. Рассмотрим для определенности периодическую внешнюю силу $F(t) = F_0 \sin\omega_1 t$:

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -k\bar{r} + F_0 \sin\omega_1 t. \tag{6.11}$$

Решение линейного уравнения (6.11) находится как сумма общего решения однородного уравнения (2.1.16) и частного решения неоднородного уравнения (6.11), которое будем искать в виде

$$r_1(t) = C\sin\omega_1 t. \tag{6.12}$$

Подстановкой этого выражения в (6.11) находим

$$C = \frac{F_0}{k - m\omega_1^2} = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_1^2)} \tag{6.13}$$

В итоге общее решение будет иметь вид:

$$r(t) = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_1^2)}\sin\omega_1 t \qquad (6.14)$$

Итак, внешняя сила приводит не только к появлению в системе дополнительных колебаний с частотой ω_1, но и к возникновению резонанса, то есть неограниченному росту амплитуды колебаний $r(t)$ при $\omega_1 \to \omega$.

Случай движения точки крепления пружины. Пусть точка крепления пружины движется по заданному закону $r_0(t) = f(t)$. Тогда в системе координат, связанной с этой точкой на шарик кроме силы жесткости пружины действует инерционная сила: $ma(t)$, где $a(t)$ – ускорение, обусловленное движением системы координат, $a(t) = \frac{d^2 f}{dt^2}$. $F(t) = -ma(t)$ – некоторая заданная функция времени.

Тогда в этой системе координат движение шарика задается:

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} = -kr + F(t) \qquad (6.15)$$

или

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} = -kr - m\frac{d^2 f}{dt^2} \qquad (6.16)$$

Решение (6.16) зависит от вида $f(t)$.

Учет сил трения. В рассматриваемой системе трение может появляться по двум причинам:

а) трение за счет неидеальности поверхности шарика и его плоскости движения. В этом случае сила трения $F = k_1 P$, где k_1 - коэффициент трения, P – вес шара. Она всегда направлена против движения шарика, её знак противоположен знаку скорости шарика $v = \frac{dr}{dt}$, т.е. $F = -k_1 mgsign\frac{dr}{dt}$. Движение шарика подчиняется уравнению:

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} = -kr - k_1 mgsign\frac{dr}{dt} \qquad (6.17)$$

Оно похоже на уравнение, где $F(t) = F_0$, но из-за переменности знака в (6.17) они описывают разные процессы. В последнем случае колебательный процесс будет затухающим, т.к. амплитуда $r(t)$ уменьшается со временем.

б) трение из-за сопротивления среды, в которой движется шарик (воздух, вода и другие). В этом случае сила трения не постоянна и зависит от скорости движения. Для нее выполняется формула Стокса:

$$F_{fric} = -\mu v = -\mu \frac{dr}{dt} \tag{6.18}$$

где коэффициент $\mu > 0$ определяется размерами шарика, плотностью среды, ее вязкостью и т.д.

Тогда уравнение движения шарика в вязкой среде:

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} = -kr - \mu \frac{dr}{dt} \tag{6.19}$$

Решение (6.19) можно получить, избавившись предварительно от члена с первой производной $\frac{dr}{dt}$. Введем замену $r(t) = \overline{r}(t)e^{\alpha t}$. Подставка замены в (6.19) дает выражение для новой функции $\overline{r}(t)$, сократив в нем множитель $e^{\alpha t}$ и положив $\alpha = -\frac{\mu}{2m}$, придем к уравнению

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} = -\left(k - \frac{\mu^2}{4m}\right)\overline{r} = -k_1 \overline{r} \tag{6.20}$$

Легко увидеть, что решение будет иметь вид:

$$r(t) = \overline{r}e^{\alpha t} = e^{-\frac{t\mu}{2m}}(A\sin\omega t + B\cos\omega t) \tag{6.20}$$

Таким образом в системе будут происходить затухающие колебания из-за наличия множителя $e^{-\frac{t\mu}{2m}}$.

Движение в сильно вязкой среде. Формула Стокса справедлива строго говоря для установившегося движения. Сила вязкого трения носит минимальный характер на малых скоростях. Когда скорости движения большие, то сила вязкого сопротивления больше, чем по формуле Стокса, т.е.

$$F(v) = -\mu v\,|\,v\,|^{\alpha},\ \mu > 0,\ \alpha > -1 \tag{6.21}$$

Тогда искомая величина определяется из уравнения

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr - \mu v\,|\,v\,|^{\alpha} \qquad (6.22)$$

Таким образом приведенное здесь построение демонстрируют иерархическую цепочку моделей «пружина – шарик», получающихся одна из другой при последовательном отказе предположений, идеализирующих изучаемый объект. В одних случаях усложнение существенно не меняет картину, в других – значительно все меняется.

Путь от «простого к сложному» дает возможность поэтапного изучения все более реалистичных моделей и сравнивания их свойства.

Существует и другой путь построения и изучения моделей: от «общего к частному». Очевидно, что для рассмотрения случая достаточно общее уравнение движения системы «пружина – шарик» записывается в виде:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -k(r,t)r + F\left(r,t,\frac{dr}{dt}\right) \qquad (6.23)$$

где k и F могут быть разнообразными функциями своих аргументов.